

# Revisie in de volumeramingen van de nationale rekeningen

## 1. Synthese

Vorig jaar heeft het Instituut voor de Nationale Rekeningen (INR) een ingrijpende occasionele revisie doorgevoerd in de aggregaten van de nationale rekeningen tegen lopende prijzen. Dit jaar werd, zoals aangekondigd, de methodologie voor de ramingen in volume grondig herzien.

De revisie van de volumeramingen behelst drie luiken:

- Een kwaliteitscontrole op de reeksen over de productie, het intermediair verbruik en de toegevoegde waarde tegen prijzen van 2000 op NACE 2 (60 bedrijfstakken). Daar waar nodig werden aanpassingen in de onderliggende deflatoren en volume-evoluties doorgevoerd.
- De aanpassing van de methodologie voor de volumeramingen in het niet-marktonderwijs. Tot nu toe werd het volume van de geproduceerde onderwijsdiensten geraamd als som van de gedeflateerde kosten; in de nieuwe methodologie wordt de productie in volume geraamd via een directe volume-indicator (aantal uren-leerlingen naar onderwijstype en per regio).
- De transformatie van reeksen tegen prijzen van een vast basisjaar (2000) naar reeksen tegen prijzen van het vorige jaar waaruit reeksen in kettingeuro kunnen worden afgeleid.

De impact van deze drie elementen op de volumegroei van het bbp voor (semi-) definitieve jaren<sup>1</sup> wordt hierna geïllustreerd:

**TABEL 1**      **VOLUMEGROEI VAN HET BBP**  
(in procenten)

	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
<b>Groei van het bbp in volume vóór revisie (a)</b>	<b>1,2</b>	<b>3,3</b>	<b>1,9</b>	<b>3,1</b>	<b>3,9</b>	<b>1,0</b>	<b>1,5</b>	<b>0,9</b>
Revisie in de volumes voor het niet-marktonderwijs	-0,2	0,0	0,0	-0,1	0,1	-0,1	0,0	0,0
Revisie in de volumes in andere bedrijfstakken	0,1	-0,1	0,2	0,0	-0,2	-0,1	0,1	0,1
Overgang op kettindexcijfers	0,1	0,2	-0,4	0,4	-0,1	0,0	0,0	0,0
<b>Groei van het bbp in volume na revisie (b)</b>	<b>1,2</b>	<b>3,5</b>	<b>1,7</b>	<b>3,4</b>	<b>3,7</b>	<b>0,8</b>	<b>1,5</b>	<b>1,0</b>
<b>Vershil in groei vóór en na revisie (b) - (a)</b>	<b>0,0</b>	<b>0,2</b>	<b>-0,2</b>	<b>0,3</b>	<b>-0,1</b>	<b>-0,3</b>	<b>0,0</b>	<b>0,1</b>

Bron: INR

1. De volumegroei van het bbp voor het jaar 2004 werd herzien van 2,6 pct. (september 2005) naar 3 pct. (september 2006). Deze herziening reflecteert in grote mate de herziening van de groei van het bbp in lopende prijzen (van 4,9 pct. naar 5,4 pct.), door gebruik van meer definitieve basisgegevens.

Hieruit blijkt dat de impact van de revisie op de jaar-op-jaargroei in absolute waarde nooit groter is dan 0,3 procentpunt. De impact van de revisie van de volumes in de andere bedrijfstakken is positief in 1996, 1998, 2002 en 2003 en negatief in 1997, 2000 en 2001, terwijl de impact van de revisie in het onderwijs op de globale groeicijfers negatief is in de jaren 1996, 1999 en 2001 en positief in 2000.

De overgang op kettingindexcijfers sorteert enkel in het begin van de periode effecten op de groei; in 1998 en 1999 zijn deze significant.

## 2. Aanpassing van de volumeramingen in het onderwijs

### 2.1 Context

In overeenstemming met Beschikking 2002/990 van de Europese Commissie zijn de methoden die door de verschillende lidstaten worden toegepast om de productie naar volume te meten, onderverdeeld in drie categorieën: A (ideaal), B (aanvaardbaar alternatief) en C (onaanvaardbaar). Uit een in 2005 door Eurostat opgesteld verslag blijkt dat veel van de in België gehanteerde methoden vallen onder de C-methoden. Dit is het geval voor de niet-marktgebonden of marktgebonden bedrijfstakken met een belangrijke financiële tussenkomst van de overheid, die nagenoeg 20 pct. van de totale bruto toegevoegde waarde van de Belgische economie vertegenwoordigen.

Om tegemoet te komen aan de eisen van Eurostat, heeft het INR derhalve het plan opgevat om de volumemeting van de productie van de niet-marktgebonden openbare onderwijsinstellingen<sup>1</sup> (NACE 80), van het openbaar bestuur (NACE 75) en van de verstrekkers van gezondheidszorg (NACE 85) te herzien. De doelstelling bestaat er met name in de C-methoden (onaanvaardbaar) te vervangen door B-methoden (aanvaardbaar alternatief)<sup>2</sup>.

De eerste fase van dit revisieprogramma, die betrekking heeft op de onderwijsinstellingen, werd afgerond met de publicatie «Gedetailleerde nationale rekeningen 1995-2005» van november 2006. De methodologische wijzigingen en de gevolgen voor de gepubliceerde reeksen worden hierna beschreven.

### 2.2 Methodologische wijzigingen

De belangrijkste wijziging die werd doorgevoerd tussen de oude en de nieuwe methode voor de volumemeting van de productie van de niet-marktgebonden onderwijsinstellingen, is de overschakeling van een methode van deflatie van de inputs voor de totaliteit van de productie naar een afzonderlijke volumemeting die beantwoordt aan de criteria van een B-methode voor elk type van geproduceerde dienst. Daarnaast worden de volumemetingen voortaan uitgevoerd op gewestelijk niveau<sup>3</sup> terwijl ze voordien beperkt waren tot het nationale niveau.

In de oude methode voor de volumemeting werden de verschillende componenten van de productiekosten (intermediair verbruik, beloning, verbruik van vaste activa) afzonderlijk gedefleerd en vervolgens geaggregeerd naar volume. De aggregatie van deze inputs naar volume stemde overeen met de productie naar volume van de niet-marktgebonden onderwijsinstellingen.

In de nieuwe methode voor de volumemeting wordt de productie van de onderwijsinstellingen eerst opgesplitst naar de verschillende geproduceerde diensten: niet-marktgebonden onderwijsdiensten (88,6 pct. van de totale productie), niet-marktgebonden overheids- en onderzoeksdiensten (9,0 pct.) en marktgebonden diensten, m.a.w. de schoolkantines, de pensionaten, het marktgebonden onderzoek en de productie van software voor eigen rekening (2,4 pct.). Deze opsplitsing was reeds beschikbaar in de overheidsrekeningen, maar werd verfijnd om de niet-marktgebonden onderzoeksactiviteiten van het hoger onderwijs af te zonderen. De productie werd tevens opgesplitst naar gewest om gewestelijke volumemetingen te verkrijgen.

1. In tegenstelling tot de niet-marktgebonden particuliere onderwijsinstellingen die behoren tot de sector van de instellingen zonder winstoogmerk t.b.v. de huishoudens (S.15).

2. De keuze van de B-methoden ten nadele van de A-methoden is gerechtvaardigd doordat het onderscheid tussen de A-methoden en de B-methoden vooral te maken heeft met de eventuele inaanmerkingneming van een kwaliteitsaanpassing. Conceptueel bestaat er momenteel evenwel geen overeenstemming over de te hanteren kwaliteitsindicatoren.

3. Dat wil zeggen het Brussels Hoofdstedelijk Gewest, het Vlaams Gewest en het Waals Gewest.

Voor elk van deze diensten worden vervolgens volume-indicatoren (afgeleid prijseffect) of prijsindices (afgeleid volume-effect) toegepast die beantwoorden aan de criteria van een B methode, rekening houdend met het marktgebonden of niet-marktgebonden karakter van de verleende dienst evenals met zijn individuele of collectieve karakter. Indien de informatie beschikbaar is, worden daarnaast ook gewestelijke volumemetingen gehanteerd.

1. De niet-marktgebonden onderwijsdiensten stemmen overeen met individuele diensten. Ze kunnen niet worden gedefleerd volgens de methode van de inputs. In overeenstemming met de vereisten van Eurostat werd het totale aantal lessen gevolgd door alle studenten (aantal uren-leerlingen) gehanteerd als volume-indicator. Om tegemoet te komen aan de criteria van een B-methode, dient deze meting van het aantal uren-leerlingen zo volledig en gedetailleerd mogelijk te zijn en gewogen op basis van de kosten. De volledige dekking van de volumemeting werd verzekerd door nauw samen te werken met de onderwijsministeries van de verschillende gemeenschappen. Wat het detailniveau betreft, werd de volumemeting van het aantal uren-leerlingen afzonderlijk uitgevoerd voor elk gewest en voor elke onderwijscategorie opgenomen in de functionele classificatie van de overheid (COFOG<sup>1</sup> met twee posities<sup>2</sup>). Tot slot stemt de nationale volume-indicator van de onderwijsdiensten overeen met het gemiddelde van de volume-indicatoren per onderwijstype en per gewest, gewogen op basis van de kosten opgenomen in de begrotingen van de gemeenschappen.
2. De niet-marktgebonden collectieve productie (openbaar bestuur, niet-marktgebonden onderzoek) wordt gedefleerd aan de hand van de methode van de inputs die voorheen werd gehanteerd voor het geheel van de productie van de onderwijsinstellingen. Wat de bestedingen inzake intermediair verbruik en verbruik van vaste activa betreft, blijven de nationale deflatoren ongewijzigd. Daarentegen werden de deflatoren van de bezoldigingen herberekend per gewest.
3. De productie van de marktgebonden diensten wordt gedefleerd aan de hand van nationale prijsindices, omdat er op dit niveau geen gewestelijke prijsindices bestaan: consumptieprijnsindices voor de marktgebonden hulpdiensten (schoolkantines, internaten), specifieke prijsindex voor de software-investeringen voor de productie van software voor eigen finaal gebruik, en indexcijfer van de conventionele bediendelonen voor de marktgebonden onderzoeksdiensten.

### 2.3 Gevolgen van de revisie

De revisie van de volumemeting van de niet-marktgebonden onderwijsinstellingen heeft een niet te verwaarlozen impact op de ontwikkeling van de productie. Zo daalt de gecumuleerde groei van het productievolume tussen de versies 2005 en 2006 van de nationale rekeningen van 9,2 pct. naar 5,1 pct. over de periode 1995-2004 (cf. tabel 2). Een analoog effect wordt waargenomen op de evolutie van de toegevoegde waarde, aangezien de groei zakt van 7,7 pct. naar 3,5 pct. Daarnaast zijn de jaar-op-jaarveranderingen van de productie en van de toegevoegde waarde minder groot in omvang na de revisie.

**TABEL 2**      **ONTWIKKELING VAN DE PRODUCTIE EN VAN DE TOEGEVOEGDE WAARDE NAAR VOLUME VAN DE NIET-MARKTGEBONDEN ONDERWIJSINSTELLINGEN VÓÓR EN NA REVISIE**

(veranderingspercentages t.o.v. het voorgaande jaar)

	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	Δ 2004/ 1995
<b>Productie</b>											
Publicatie 2006 (na revisie)	-0,4	0,3	1,5	0,2	0,3	0,7	0,9	1,2	0,3	0,3	5,1
Publicatie 2005 (vóór revisie)	2,1	0,0	2,2	1,1	-1,6	2,4	1,1	1,4	0,2	-	9,2
2006-2005	-2,5	0,3	-0,7	-0,9	1,9	-1,7	-0,2	-0,2	0,1	-	-4,1
<b>Toegevoegde waarde</b>											
Publicatie 2006 (na revisie)	-1,4	0,2	1,1	-0,1	0,9	0,6	0,1	0,5	1,5	-0,4	3,5
Publicatie 2005 (vóór revisie)	1,4	-0,1	1,7	0,9	-1,4	2,5	0,5	0,8	1,2	-	7,7
2006-2005	-2,8	0,3	-0,6	-1,0	2,3	-1,9	-0,4	-0,3	0,3	-	-4,2

Bron: INR

1. Classification of the functions of Government.

2. Basisonderwijs, secundair onderwijs, postsecundair onderwijs, hoger onderwijs en niet naar niveau in te delen onderwijs.

### 3. Aanpassing van de aggregaten tegen prijzen van 2000 (excl. onderwijs)

#### 3.1 Productieoptiek

De evaluatie en eventuele arbitrage van de reeksen productie (P.1), intermediair verbruik (P.2) en toegevoegde waarde (B.1g) in volume (en dus ook van de deflatoren van deze aggregaten) waren nodig om volgende redenen:

- de overgang naar rapporteringniveau A60<sup>1</sup> ;
- de onzekerheid over de beschikbare prijsinformatie<sup>2</sup> ;
- de onwaarschijnlijke onderliggende jaar-op-jaar evoluties in de technische coëfficiënt (input/outputratio in volume) en/of de relatieve prijzen (outputprijs/inputprijs) in de huidige reeksen voor een groot aantal bedrijfstakken op A60.

De berekeningen van de aggregaten in volume worden uitgevoerd op het meest gedetailleerde niveau van bedrijfstakindeling gebruikt in de nationale rekeningen namelijk de SUT-bedrijfstakken<sup>3</sup>.

De aggregaten in lopende prijzen worden gedeflateerd via de methode van dubbele deflatie: de productie wordt gedeflateerd met een berekende deflator van de productie, het intermediair verbruik wordt gedeflateerd met een berekende deflator van de input. Beide worden geraamd door prijsinformatie (voornamelijk afkomstig van het NIS) te combineren met productinformatie uit de aanbod- en gebruikstabel (AGT) die de basis vormt voor het wegingsschema van de deflatoren.

Er is ruimte om de deflatoren van output en input te arbitreran<sup>4</sup> omdat:

- de prijsinformatie niet steeds betrouwbaar is;
- de structuur van de input slechts bij benadering gekend is in meerdere bedrijfstakken;
- er voor de ingevoerde goederen<sup>5</sup> enkel eenheidswaarden<sup>6</sup> beschikbaar zijn;
- er weinig prijsinformatie bestaat voor in België en in het buitenland aangekochte diensten.

Er is evenwel meer ruimte om de deflator van de input (en dus het intermediair verbruik in volume) aan te passen dan de outputprijzen (en dus de output in volume).

De doorgevoerde aanpassingen resulteren op het niveau van de bedrijfstakken in minder sterke jaar-op-jaarschommelingen in de technische coëfficiënten en relatieve prijzen zonder de onderliggende trendmatige bewegingen in deze ratio's te negeren.

#### 3.2 Bestedingsoptiek

De aanpassing van de productieoptiek in volume (toegevoegde waarde) moet ook langs de kant van de bestedingen worden doorgerekend. De aanpassingen van de toegevoegde waarde in volume reflecteren zich slechts in enkele componenten van de finale bestedingen in volume. Zo zijn er aanpassingen voor:

- de voorraadwijzigingen in volume;
- de invoer in volume: omdat een groot deel van het intermediair verbruik wordt ingevoerd is het niet onlogisch dat aanpassingen van het intermediair verbruik in volume aanleiding geven tot wijzigingen van de invoer in volume. De ruilvoet kan hierdoor in zeer beperkte mate wijzigen.

Daarentegen zijn er geen aanpassingen aan:

- de consumptieve bestedingen in volume omdat de deflator van de consumptieve bestedingen van de gezinnen goed gekend is en dus niet wijzigt, evenmin als deze van de consumptieve bestedingen van de overheid<sup>7</sup> en de IZW's;

1. Problemen in de volumereeksen per bedrijfstak kunnen onzichtbaar blijven op A31, doch aan de oppervlakte komen indien een groter bedrijfstakdetail wordt gepubliceerd (A60).

2. Vanaf het jaar 2000 werd een nieuw indexcijfer gecompileerd dat betere prijsinformatie zou moeten opleveren voor de industrie dan voorheen.

3. Dit zijn groeperingen van NACE 3- of NACE 4-bedrijfstakken en vormen 120 SUT-bedrijfstakken.

4. En bijgevolg de output, input en toegevoegde waarde in volume aan te passen.

5. Een deel hiervan (grondstoffen en halffabricaten) komt in het intermediair verbruik terecht.

6. Eenheidswaarden worden bekomen door de waarde van de invoer te delen door het aantal ingevoerde producten (per productgroep). De aldus bekomen waarde per eenheid product kan worden beschouwd als proxy voor een invoerprijs (bijv. prijs per ton staal) doch houdt geen rekening met kwaliteitsverschillen tussen producten die niet homogeen zijn.

7. Het afgeleide effect van de aangepaste volumeraming in de productie van onderwijsdiensten op de overheidsconsumptie in volume wordt besproken in punt 3.

- de investeringen in vaste activa in volume omdat de productie in volume van bedrijfstakken die investeringsgoederen produceren (NACE 45, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35) niet wijzigt<sup>1</sup>;
- de uitvoer in volume omdat het grootste deel hiervan op goederen slaat die worden geproduceerd in de landbouw en in de industrie en de productie in volume in deze takken weinig of niet wijzigt.

### 3.3 Impact van de revisie

Zoals blijkt uit tabel 1 genereren de evaluatie en, daar waar nodig, arbitrages in geen enkel jaar bbp-groeiverschillen, in absolute waarde, van meer dan 0,2 procentpunt.

## 4. Overgang op kettingindexcijfers

### 4.1 Inleiding

Intertemporele waardeveranderingen van economische aggregaten kunnen opgedeeld worden in een factor die de prijsveranderingen van de onderliggende producten weergeeft en een factor die de volumeveranderingen weergeeft. Volumemeting in de nationale rekeningen is van belang om de groei van het bbp en zijn componenten te kennen, als input voor diverse economische studies die de structuur en de evolutie van de economie in reële termen onderzoeken, en als input voor productiviteitsmetingen.

Om de volumegroei van het bbp en zijn componenten te meten is het nodig om uit de waarde-evolutie het effect van de prijsveranderingen te elimineren, door de prijzen a.h.w. «constant» te houden. Tot nu toe werd dit gedaan door een keuze van een *vast basisjaar*, dat de referentie vormt om, op een zo gedetailleerd mogelijk niveau, volumeberekeningen te maken. De prijsstructuur en de wegingen van dat vast basisjaar worden in die benadering gebruikt om gedetailleerde reeksen en aggregaten tegen «constante prijzen van het basisjaar» te berekenen.

Omdat de relatieve prijzen van het basisjaar in de loop van de tijd steeds minder relevant worden, neemt de potentiële vertekening van de groei voor een bepaald jaar toe naarmate dit jaar verder verwijderd is van het basisjaar. Daarom werd tot nu toe in de nationale rekeningen om de vijf jaar een recenter basisjaar gekozen. Ervaringen in diverse landen hebben evenwel uitgewezen dat bij snel wijzigende relatieve prijzen het mechanisme van een vijfjaarlijkse update van het basisjaar niet adequaat is om de recente economische groei te meten. Daarom werd in de Europese Unie besloten over te schakelen op een *jaarlijkse update van het basisjaar*. De jaarlijkse actualisatie van de prijsstructuur komt neer op het meten van de groei in «kettingvolumemaatstaven»<sup>2</sup>.

Bij toepassing van kettingindices wordt de volumegroei tussen twee opeenvolgende periodes,  $t$  en  $t+1$ , berekend door de prijzen en gewichten van het jaar  $t$  te gebruiken. Zo wordt bv. de groei van de investeringen in volume tussen de jaren 1 en 2 berekend door de investeringen van jaar 2 uitgedrukt in prijzen van jaar 1 te vergelijken met de investeringen in jaar 1. De groei tussen de jaren 2 en 3 wordt berekend door de investeringen in jaar 3 uitgedrukt in prijzen van jaar 2 te vergelijken met de investeringen in jaar 2, enz. De wijzigingen tussen opeenvolgende periodes worden aan elkaar «gelinkt» (gecumuleerd) om een kettingindex te bekomen. Wanneer men tenslotte de kettingindex van een aggregaat (of subaggregaat) toepast op het bedrag (niveau) van een gekozen *referentiejaar* (bv. 2004), bekomt men een volumemaatstaf in «kettingeuro's (referentiejaar 2004)». De keuze van het referentiejaar heeft geen invloed op het groeipatroon van de reeks.

De introductie van kettingindices verbetert de accuraatheid van de meting van de economische groei en leidt tot een verbetering van de internationale vergelijkbaarheid.

Gebruikers van reeksen in kettingniveaus moeten er rekening mee houden dat, omwille van technisch statistische eigenschappen, de toepassing van kettingindices resulteert in het verlies van additiviteit van de volumeniveaus (behalve voor de resultaten betreffende het referentiejaar en het onmiddellijk daaropvolgende jaar). *Niet-additiviteit* betekent dat in reeksen in kettingniveaus, bijvoorbeeld het bbp, niet gelijk is aan de som van zijn componenten

1. Met uitzondering van kleine aanpassingen in takken NACE 33 en 35.

2. Beschikking 98/715 van de Commissie van 30 november 1998. Kettingmaatstaven worden buiten de Europese Unie o.a. ook toegepast in de VS, Canada, Australië en Japan.

(finaal verbruik, investeringen, voorraadwijzigingen, netto-uitvoer). De discrepanties tussen een aggregaat en de som van zijn componenten die bij toepassing van kettingvolumemeting ontstaan, kunnen niet geïnterpreteerd worden als kwaliteitsindicatoren en worden ook niet over de componenten verdeeld.

Na een voorstelling van kettingindices in het algemeen, wordt hierna de toepassing ervan in de nationale rekeningen toegelicht.

## 4.2 Kettingindices

In een volumeberekening in volume waarbij de gewichten van de indexformule over de gehele observatieperiode ongewijzigd blijven, worden de waarden in volume voor alle jaren berekend tegen de prijzen van een *vast basisjaar*, vandaar de benaming «constante» of «vaste prijzen». Het *basisjaar 0* is dus het jaar waarvoor de waarden in lopende prijzen gebruikt worden voor weging van de volumemaatstaven op het meest gedetailleerde (of «elementair») aggregatieniveau.

De groei tussen het jaar  $t$  en het basisjaar  $0$  wordt met de *Laspeyres-volume-index met vast basisjaar* op een rechtstreekse manier als volgt bekomen:

$$Q_L^{0,t} = \frac{\sum_i q_i^t \cdot p_i^0}{\sum_i q_i^0 \cdot p_i^0} = \frac{\sum_i p_i^0 \cdot q_i^0 \cdot \frac{q_i^t}{q_i^0}}{\sum_i p_i^0 \cdot q_i^0} = \sum_i \frac{p_i^0 \cdot q_i^0}{\sum_i p_i^0 \cdot q_i^0} \cdot \frac{q_i^t}{q_i^0} = \sum_i \text{gewicht}_i \cdot \frac{q_i^t}{q_i^0}$$

Als alternatief hiervoor kan de *Laspeyres-kettingvolume-index* gebruikt worden. Elke schakel van de ketting is een *Laspeyres-volume-index* die de groei tussen twee opeenvolgende periodes beschrijft. Het basisjaar is niet langer vast maar wordt variabel, meer bepaald telkens de eerste van de twee opeenvolgende periodes.

Schakel van de ketting tussen periode  $t-1$  en  $t$ :

$$Q_L^{t-1,t} = \frac{\sum_i q_i^t \cdot p_i^{t-1}}{\sum_i q_i^{t-1} \cdot p_i^{t-1}}$$

De *kettingindex*, die de groei van periode  $0$  tot  $t$  beschrijft, wordt bekomen als het product van indices tussen de opeenvolgende periodes:

$$Q_L^{0,t} = Q_L^{0,1} \cdot Q_L^{1,2} \cdot \dots \cdot Q_L^{t-1,t} = \prod_{\tau=1}^{t-1} Q_L^{\tau-1,\tau}$$

Bij gebruik van kettingindices wordt een vergelijking van twee periodes  $0$  en  $t$ , die twee of meer periodes van elkaar verwijderd zijn, bekomen door een aantal schakels met elkaar te vermenigvuldigen, waarbij deze schakels volume-indices zijn voor de groei tussen twee opeenvolgende periodes. In tegenstelling tot de indices met een vast basisjaar heeft een kettingindex geen vaste maar een samengestelde wegingsstructuur. De groei tussen de periodes  $0$  en  $t$  is dus afhankelijk van alle tussenliggende groeivoeten tussen twee opeenvolgende periodes. In tegenstelling tot de volume-index met een vast basisjaar is de kettingvolume-index bijgevolg «pad-afhankelijk».

Bij de presentatie van een kettingindex in een tijdreeks is de notie referentiejaar van belang. Het referentiejaar is het jaar dat gebruikt wordt om de volumereeks te presenteren. In een reeks indexcijfers is dit het jaar dat gelijk is aan  $100$ . In onderstaande reeks indexcijfers met als basisjaar telkens het voorgaande jaar, geldt dat voor iedere van deze indices  $t-1=100$ . Het referentiejaar is gelijk aan het basisjaar, maar verandert jaarlijks:

1999	2000	2001	2002	2003
98	105	104	107	110

Deze reeks kan in een vast referentiejaar uitgedrukt worden, door het «herrefereren» («re-referencing» of «chaining»). In onderstaand voorbeeld wordt 2000 als vast referentiejaar gekozen. De keuze van het referentiejaar heeft geen invloed op de groeicijfers tussen twee opeenvolgende periodes.

1999	2000	2001	2002	2003
95,2	100	104	111,3	122,4

1999:  $100/1,05 = 95,2$   
 2000: referentiejaar = 100  
 2001:  $100 \cdot 104/100 = 104$   
 2002:  $104 \cdot 107/100 = 111,3$   
 2003:  $111,3 \cdot 110/100 = 122,4$

#### 4.3 Kettingvolumemeting in de nationale rekeningen: algemene principes

Na uitgebreide discussie in internationale fora werd besloten dat de volumemeting in de nationale rekeningen beter kan gebeuren via het gebruik van kettingindices dan via de traditioneel gebruikte indices met vast basisjaar. Naast de overschakeling van een vast naar een variabel basisjaar stelt zich ook de vraag naar de formule (cf. bijlage) die toegepast wordt. De Europese Unie heeft besloten dat de lidstaten de jaar-op-jaar volumewijzigingen moeten berekenen via de Laspeyres indexformule.

De voor- en nadelen van volumeberekeningen via een vast basisjaar versus via kettingindices worden besproken aan de hand van onderstaand voorbeeld, waarbij een aggregaat C berekend wordt uit de subaggregaten A en B, en deze op hun beurt uit de respectieve producten a1, a2, en b1, b2.

Om de waarden bekomen via kettingindices te benoemen wordt de notie «kettingeuro's (referentiejaar yyyy)» gebruikt. Zo stellen bijvoorbeeld «kettingeuro's (referentiejaar 2000)» de tijdreeksen voor gepresenteerd in kettingvolumeniveau die bekomen door de kettingindexreeks te vermenigvuldigen met de waarde (tegen lopende prijzen) van het betreffende aggregaat in het referentiejaar 2000.

De waarde van subaggregaat A in kettingeuro's wordt in periode 1 en 2 bekomen door de waarde van het referentiejaar (periode 0) te vermenigvuldigen met respectievelijk de kettingindex (QL ketting) voor periodes 1 en 2. De schakel van bijvoorbeeld periode 2 op periode 1 van deze kettingindex wordt bekomen door de Laspeyres-volume-index te berekenen voor de som van de onderliggende producten a1 en a2. Op analoge manier wordt de waarde van subaggregaat B en aggregaat C bekomen. Aggregaat C bestaat uit de producten a1, a2, b1 en b2. Zo is bijvoorbeeld de Laspeyres-volume-index van C voor periode 2 op periode 1 gelijk aan  $118,1 = 482,0/408$ . Bemerkt dat de correcte waarde in kettingeuro's voor C in periode 2 gelijk is aan 432,4 en niet aan  $C'=A+B = 434,2$ . Het bedrag 432,4 is immers consistent met de vooraf berekende groeivoet QL (periode 2/periode 1) voor het totaal, namelijk 118,1.

De enige manier om de gegevens van bovenstaand voorbeeld uit te drukken in het vaste referentiejaar 2000, zonder de groeivoeten van het totaal C en van de subaggregaten A en B te verstoren, bestaat er dus in iedere reeks (C, A, B, a1, a2, b1, b2) afzonderlijk te herreferencieren.

**TABEL 3 VOLUMEBEREKENING IN KETTINGEURO'S**

periode	0			1				2			
	P0	Q0	P0.Q0	P1	Q1	P1.Q1	P0.Q1	P2	Q2	P2.Q2	P1.Q2
a1	20	3	60	14	5	70	100	10	10	100	140
a2	10	14	140	10	13	130	130	10	10	100	100
A=a1+a2			200			200	230			200	240
QL t/t-1							115,0				120,0
							=100*230/200				=100*240/200
QL-ketting			100				115,0				138,0
											=115*120/100
waarde A			200				230,0				276,0
											=200*138/100
b1	5	11	55	7	14	98	70	8	16	128	112
b2	6	14	84	10	11	110	66	11	13	143	130
B=b1+b2			139			208	136			271	242
QL t/t-1							97,8				116,3
QL-ketting			100				97,8				113,8
waarde B			139				136,0				158,2
waarde A +waarde B = C'			339				366,0				434,2
C= a1+a2+b1+b2			339			408	366,0			471	482,0
QL t/t-1			100				108,0				118,1
QL-ketting			100				108,0				127,5
waarde C			339				366,0				432,4
non-additiviteit (waarde C - C')			0				0,0				-1,8

Bron: INR

P: prijs

Q: hoeveelheid

QL: Laspeyres-volume-index t/t-1

QL-ketting: Laspeyres-volume-index, referentieperiode 0 = 100

### Voordelen van kettingvolumemeting

Uit de Laspeyres-volume-index met een vast basisjaar (cf. punt 4.2) blijkt dat na verloop van tijd de vaste wegingsstructuur (het «gewicht» of «budgetaandeel») aan representativiteit kan inboeten. Dit probleem zal aan belang winnen naarmate er aanzienlijke wijzigingen in de relatieve prijzen optreden. Om vertekening van de groeivoeten ten gevolge van substitutie-effecten te vermijden kan het basisjaar regelmatig herzien worden. Tot nu toe gebeurde dit in de nationale rekeningen doorgaans om de 5 jaar. Bij het gebruik van kettingindices gebeurt dit jaarlijks, waardoor de wegingsstructuur zo relevant mogelijk is en de jaar op jaar groeivoeten (en normaliter ook de langetermijngroeivoeten) correcter berekend worden.

Het substitutie-effect wordt hierna geïllustreerd door de volumegroei van subaggregaat A berekend via kettingindices te vergelijken met deze berekend via een vast basisjaar.



**TABEL 4 VOLUME-GROEI TEGEN CONSTATE PRIJZEN (BASISJAAR 0)**

periode	0			1			2		
	P0	Q0	P0.Q0	P1	Q1	P0.Q1	P2	Q2	P0.Q2
a1	20	3	60	14	5	100	10	10	200
a2	10	14	140	10	13	130	10	10	100
A=a1+a2			200			230			300
QL t/0			100			115,0			150,0
volume-index t/t-1						115,0			130,4

Bron: INR

De prijzen van product a1 zijn relatief gedaald t.o.v. deze van a2, waardoor de verhandelde hoeveelheden van a1 relatief gestegen zijn. Bij toepassing van een variabel basisjaar (cf. tabel 3) is de volume-index van A voor periode 2/ periode 1 = 120,0, waardoor de kettingindex = 138,0. Bij toepassing van het vast basisjaar 0 komt de substitutie van a1 naar a2 in de index van periode 2/ periode 0 niet tot uiting, en wordt de volumegroei (150,0) overschat. Indices met een vast basisjaar kennen te veel gewicht toe aan producten waarvoor de relatieve prijzen gedaald zijn.

Bij gebruik van een index met vast basisjaar wordt de groei tussen twee *opeenvolgende* periodes berekend door de index van periode t te delen door deze van periode t-1. In tabel 4 is de groei tussen de periodes 2 en 1 gelijk aan  $150,0/115,0 = 130,4$ . De groeivoet van periode tot periode, bekomen door twee Laspeyres-volume-indices (met een ander basisjaar dan een van deze twee periodes) door elkaar te delen is echter zelf geen Laspeyres-index, noch een ander bekend type van indices. Het gebruik van kettingindices heeft het voordeel dat de volumegroei van een aggregaat tussen twee opeenvolgende jaren duidelijk interpreteerbaar is, namelijk een gewogen rekenkundig gemiddelde van de volumegroei van de componenten van dit aggregaat, met als weging het aandeel van deze componenten in de waarde van het aggregaat van het (variabele) basisjaar<sup>1</sup>. Zo is bijvoorbeeld de volumegroei van het bbp in een bepaald jaar gelijk aan het gewogen rekenkundig gemiddelde van de volumegroei van de componenten (finaal verbruik, investeringen, voorraadwijzigingen, netto-uitvoer), waarbij de aandelen van deze componenten in lopende prijzen in het bbp van het voorgaande jaar als gewichten gebruikt worden. Op zijn beurt is de groei van het finaal gezinsverbruik een gewogen rekenkundig gemiddelde van de groei van de componenten (voedingsmiddelen, kleding,.., vervoer,..), en is ieder van deze componenten een gemiddelde van de onderliggende rubrieken.

Een bijkomend voordeel van het gebruik van kettingindices is dat *ceteris paribus* de bedragen tegen lopende prijzen en de gebruikte prijsindices voor deflating, de groeivoet tussen twee opeenvolgende periodes nooit moet herzien worden. Dit is niet het geval bij volumemeting met een vast basisjaar.

### Nadelen van kettingvolumemeting

Zoals uit het voorbeeld van één enkele reeks (zie punt 4.2) blijkt, heeft de keuze van een referentiejaar geen invloed op de groeicijfers tussen twee opeenvolgende periodes. Ook wanneer een variabele bestaat uit diverse sub-variabelen is het noodzakelijk dat de jaar-op-jaar groeivoeten van elke reeks onveranderd blijven bij wijziging van het referentiejaar. Daartoe moet elke variabele afzonderlijk geherreferenceerd worden, en dit zowel voor de meest gedetailleerde reeks, een sub-totaal of een globaal aggregaat zoals het bbp. Het gevolg hiervan is dat in de volumereeksen (in niveau) met een vast referentiejaar discrepanties ontstaan tussen (sub-)aggregaten en de som van de onderliggende individuele reeksen. Dit is het *non-additiviteitsprobleem*<sup>2</sup>. Zo is in bovenstaand voorbeeld in periode 2 de non-additiviteit tussen aggregaat C en de subaggregaten A en B gelijk aan -1,8. Uiteraard is er ook

1. Bemerk dat de optie voor een Paasche-(volume-)index, die een harmonisch gewogen gemiddelde is (cf. bijlage) minder duidelijk interpreteerbaar zou zijn dan een Laspeyres-index.
2. Additiviteit van indices betekent dat, op ieder aggregatieniveau, de (volume-)index voor het aggregaat een gewogen rekenkundig gemiddelde is van de (volume-)indices van de componenten waarbij de waarden van de basisperiode als gewicht gebruikt worden. Additiviteit van niveaus betekent dat de identiteit aggregaat = som van de componenten behouden blijft wanneer de waarden van de referentieperiode van zowel het aggregaat als zijn componenten met behulp van een set volume-indices geëxtrapoleerd worden in de tijd.

non-additiviteit tussen A en B en hun respectieve componenten. De non-additiviteit tussen bijvoorbeeld B en  $b_1+b_2$  is in periode 2 gelijk aan  $0,2^1$ .

Non-additiviteit doet zich voor vanaf het tweede jaar na het referentiejaar. In bovenstaand voorbeeld is er geen non-additiviteit voor periode 1, omdat de Laspeyres-kettingvolume-index samenvalt met de Laspeyres-volume-index  $t/t-1$ , en deze laatste per constructie additief is. Vanaf periode 2 combineert de kettingindex de gewichtenschema's van verschillende Laspeyres-volume-indices  $t/t-1$ , waardoor de additiviteit verloren gaat. Gezien de hoge prioriteit die aan correcte meting van volumeontwikkelingen in de nationale rekeningen toegekend wordt, is het evident dat de discrepantie tussen aggregaten en de som van hun componenten niet over deze componenten mag verdeeld worden.

#### 4.4 Volumeberekening in de praktijk

In de praktijk worden in de nationale rekeningen de volume-evoluties niet berekend uit rechtstreekse prijs- en hoeveelheidsinformatie, omdat deze meestal niet beschikbaar zijn. De aggregaten in volume worden berekend door op een zo gedetailleerd mogelijk niveau de bedragen in waarde te deflateren met een prijsindex die qua dekking zo goed mogelijk aansluit bij de te deflateren waarde. In principe komen beide berekeningsmethodes op hetzelfde neer.

Dit wordt hierna geïllustreerd<sup>2</sup> voor de Laspeyres-volume-index  $Q_L$  van de huidige periode  $t$  t.o.v. de basisperiode 0, waarbij  $\Sigma$  staat voor de sommatie over alle producten  $i$ :  $\Sigma_{i=1}^N$ .

$$\begin{aligned}
 Q_L &= \Sigma (p_i^0 \cdot q_i^t) / p_i^0 \cdot q_i^0 \\
 &= \Sigma (p_i^0 \cdot (v_i^t / p_i^t)) / v^0 \quad (p^t \cdot q^t = v^t) \\
 &= \Sigma (v_i^t \cdot (p_i^0 / p_i^t)) / v^0 \\
 &= \Sigma (v_i^t / (p_i^t / p_i^0)) / v^0 \\
 &= \text{de som van de met een prijsindex gedeflateerde waarden van het huidig jaar, gedeeld door de som van de waarden (v) van het basisjaar 0.}
 \end{aligned}$$

Bij toepassing van kettingindices is de basisperiode 0 in bovenstaande formules uiteraard te vervangen door  $t-1$ .

Aangezien de waarde-evolutie van een variabele ontbonden wordt in een volume- en een prijscomponent en de volumemeting gebruik maakt van de Laspeyres-formule is de deflator van het Paasche-type (cf. bijlage)<sup>3</sup>. In de praktijk zijn Paasche-deflatoren zelden beschikbaar. De prijsevoluties beschikbaar in de basisstatistieken nodig voor het opstellen van de nationale rekeningen zijn van het Laspeyres-type (bv. index van de consumptieprijzen, indices van industriële productieprijzen). Op het meest gedetailleerde niveau van deflatering wordt het quotiënt tussen  $PL_t$  en  $PL_{t-1}$  als proxy voor de in theorie benodigde Paasche-prijsevolutie gebruikt. Hoe gedetailleerder het niveau waarop de volumeberekening gebeurt hoe beter deze proxy de gewenste Paasche-deflator zal benaderen. Dit kan geïllustreerd worden met onderstaand voorbeeld.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
	CUP t-1	volumeindex t/t-1	PYP	prijsindex t/t-1	CUP t
	2004 CUP	volume- wijziging 2005/2004	2005 in prijzen van 2004	prijswijziging 2005/2004	2005 CUP
A	100	105,0	105	110,0	115,5
B	300	110,0	330	95,0	313,5
A+B	400	108,8	435	98,6	429,0

CUP: waarde in lopende prijzen (current prices)

PYP: waarde in prijzen van het voorgaande jaar (t in prijzen van t-1, previous year prices)

Een subaggregaat A+B van het finaal gezinsverbruik bestaat bijvoorbeeld uit groenten (A) en fruit (B). De bestedingen in lopende prijzen van het huidig jaar van groenten (cel A:e) worden gedeflateerd met de prijsinformatie voor groenten afkomstig uit de index van de consumptieprijzen. De index van de consumptieprijzen

1. De respectieve kettingindex voor  $b_1$  en  $b_2$  is in periode 2 gelijk aan  $145,5 ((70/55)*(112/98)*100)$  en  $92,9 (((66/84)*(130/110)*100))$ , waaruit volgt dat de respectieve waarde in kettingniveaus gelijk is aan  $80,0 (55*145,5/100)$  en  $78,0 (84*92,9/100)$ .
2. Voor de hier gebruikte notatie cf. de bijlage over indexformules.
3. Bemerkt ook dat de decompositie van de waarde-evolutie van een aggregaat (bv. bnp, finaal verbruik van huishoudens) in een volume- en prijsevolutie, waarbij voor de volume-evolutie de Laspeyres formule gekozen wordt, impliceert dat de deflator van dit aggregaat een Paasche-index is. Dit verklaart gedeeltelijk waarom de deflator van het finaal verbruik van de huishoudens kan afwijken van het indexcijfer van de consumptieprijzen, dat een Laspeyres-prijsindexcijfer met vast basisjaar is.

is echter een Laspeyres-prijsindex met vast basisjaar (bv. 2000). Als proxy voor de benodigde Paasche-prijsindex wordt het quotiënt van de Laspeyres indexen voor 2005 en voor 2004 gekozen (cel A;d). Consumptie van groenten in prijzen van 2004 (cel A;c) =  $115,5/(110,0/100) = 105$ . De volume-index 2005/2004 (cel A;b) =  $100 \cdot 105/100 = 105$ . Analoog voor fruit (B). De volume-indices voor A en B zijn per constructie van het Laspeyres-type omdat de waarde-evolutie tussen 2004 en 2005 in een prijs- en hoeveelheidsevolutie ontbonden werd en de prijsevolutie per hypothese van het Paasche-type is. Bemerk dat deze hypothese realistischer wordt, en dat de volume-index t/t-1 beter de gewenste Laspeyres-index benadert, naarmate op een meer gedetailleerd niveau gewerkt wordt (diverse types groenten en fruit). De productgroepen worden dan homogener en eventuele substitutie-effecten worden bij de berekening van prijsindex t/t-1 geminimaliseerd<sup>1</sup>.

Het aggregaat A+B in prijzen van voorgaand jaar (cel A+B;c) wordt in de praktijk bekomen als som van de subaggregaten A en B (435 = 105+330), en de volume-index van het aggregaat A+B (cel A+B;b) uit PYP/CUP\_t-1. De prijsindex van A+B (cel A+B;d) wordt bekomen uit  $CUP_t / PYP^2$ . De berekening van ieder aggregaat waarvan A+B zelf een component is gebeurt op analoge manier.

Ook de volumeberekeningen voor output, intermediair verbruik, en andere variabelen uit de nationale rekeningen kunnen op analoge manier gebeuren. Analoog aan de berekening van de toegevoegde waarde in lopende prijzen als het verschil tussen de output en het intermediair verbruik in lopende prijzen, wordt de toegevoegde waarde in volume (COP of PYP) bekomen door de gedeflateerde output te verminderen met het gedeflateerde intermediair verbruik.

De omzetting van reeksen tegen vaste prijzen (COP2000) naar prijzen van het voorgaande jaar (PYP) voor de jaren waarvoor de volumemeting in prijzen van het voorgaande jaar niet op het meest gedetailleerde niveau tot stand gekomen is, gebeurt per reeks<sup>3</sup> op de volgende manier:

$$PYP (t \text{ tegen prijzen van } t-1) = \text{lopende prijzen (CUP}_t) / \text{proxy voor Paasche-deflator } t/t-1$$

waarbij: proxy voor Paasche-deflator =  $(CUP_t / COP2000t) / (CUP_{t-1} / COP2000t-1)$ .

1. In de meest homogene situatie, namelijk dat een productgroep uit slechts één product bestaat (bv. croissants) is de Laspeyres prijsindex identiek met de Paasche-prijsindex, namelijk de «prijsverhouding» (cf. bijlage indexformules).
2. Bemerk dat de prijs- en volume-index ook kunnen bekomen worden door toepassing van respectievelijk de Paasche- en Laspeyres-formule (cf. bijlage indexformules). Het bedrag in PYP van A+B kan berekend worden als  $CUP_{t-1} \cdot \text{volume-index } t/t-1$ . Beide methodes komen op hetzelfde neer wegens de additieve eigenschap van de Laspeyres-indexformule. De *rationale* van de keuze van de Europese Commissie voor meting van de groei met Laspeyres-volume-indexen ligt dan ook in de gemakkelijke praktische uitvoerbaarheid en interpreteerbaarheid ervan.
3. Detailniveau van de omzetting: output en intermediair verbruik: 124 bedrijfstakken; finaal verbruik huishoudens: 113 rubrieken; investeringen: 75 rubrieken.

## Bijlage: Indexformules

Berekening van prijsindices P en volume-indices Q voor N producten voor t+1 periodes

$$i = 1, \dots, N$$
$$t = 0, \dots, t$$

Indexcijfers kunnen doorgaans geformuleerd worden als gewogen gemiddelden van prijs- of hoeveelhedenverhoudingen; waarbij de formules onderling voornamelijk verschillen door de gewichten die aan prijs- of hoeveelhedenverhoudingen toegekend worden, en door het type weging (rekenkundig, meetkundig, harmonisch<sup>1</sup>).

Een prijsindex (respectievelijk volume-index) is een gewogen gemiddelde van de proportionele veranderingen in de prijzen (prijsverhoudingen, respectievelijk hoeveelhedenverhoudingen) van een specifieke groep producten tussen 2 periodes.

Notatie:

$$p_i^t \quad \text{prijs van } i \text{ in periode } t$$
$$q_i^t \quad \text{hoeveelheid van } i \text{ in periode } t$$

$$p^t \equiv [p_1^t, \dots, p_N^t] \quad \text{prijsvector voor periode } t$$
$$q^t \equiv [q_1^t, \dots, q_N^t] \quad \text{hoeveelhedenvector voor periode } t$$

$$p_i^t/p_i^0 \quad \text{prijsverhouding (price relative)}$$
$$q_i^t/q_i^0 \quad \text{hoeveelhedenverhouding (quantity relative)}$$

$$v_i^t = p_i^t \cdot q_i^t \quad \text{waarde van } i \text{ in lopende prijzen in periode } t$$
$$= (p_i^t/p_i^0) \cdot p_i^0 \cdot q_i^t$$

$$v^t = p^t \cdot q^t = \sum_{i=1}^N v_i^t = \sum_{i=1}^N p_i^t \cdot q_i^t \quad \text{totale waarde (aggregate value) in lopende prijzen in periode } t$$

$$s_i^t \equiv p_i^t \cdot q_i^t / p^t \cdot q^t \quad \text{het aandeel van product } i \text{ in de totale waarde van periode } t \text{ (gewicht)}$$

Courante gebruikte indices zijn van het type Laspeyres, Paasche of Fisher, en kunnen zowel voor prijs- als volume-evoluties gedefinieerd worden:

### Laspeyres-prijsindex

$$P_L \equiv p^t \cdot q^0 / p^0 \cdot q^0 = \sum_{i=1}^N p_i^t \cdot q_i^0 / \sum_{i=1}^N p_i^0 \cdot q_i^0 = \sum_{i=1}^N s_i^0 (p_i^t / p_i^0)$$

$P_L$  is het gewogen rekenkundig gemiddelde van de prijsverhoudingen  $p_i^t/p_i^0$ , met als weging per product  $i$  het aandeel van  $i$  in de totale waarde van periode 0.

### Paasche-prijsindex

$$P_P \equiv p^t \cdot q^t / p^0 \cdot q^t = 1 / \sum_{i=1}^N p_i^0 \cdot q_i^t / p^t \cdot q^t = [\sum_{i=1}^N s_i^t (p_i^t / p_i^0)^{-1}]^{-1}$$

$P_P$  is het gewogen harmonische gemiddelde van de prijsverhoudingen  $p_i^t/p_i^0$ , met als weging per product  $i$  het aandeel van  $i$  in de totale waarde van periode  $t$ .

### Laspeyres-volume-index

$$Q_L \equiv p^0 \cdot q^t / p^0 \cdot q^0 = \sum_{i=1}^N s_i^0 (q_i^t / q_i^0)$$

1. Het ongewogen harmonisch gemiddelde van  $n$  waarnemingen van variabele  $x$  is:  $1 / ((\sum_i (1/x_i)) / n) = n(\sum_i x_i^{-1})^{-1}$

$Q_L$  is het gewogen rekenkundig gemiddelde van de hoeveelhedsverhoudingen  $q_i^t/q_i^0$ , met als weging per product  $i$  het aandeel van  $i$  in de totale waarde van periode 0.

#### Paasche-volume-index

$$Q_P \equiv p^t \cdot q^t / p^t \cdot q^0 = [\sum_{i=1}^N s_i^t (q_i^t/q_i^0)^{-1}]^{-1}$$

$Q_P$  is het gewogen harmonische gemiddelde van de hoeveelhedsverhoudingen  $q_i^t/q_i^0$ , met als weging per product  $i$  het aandeel van  $i$  in de totale waarde van periode  $t$ .

#### Fisher-indices

Zijn het geometrisch gemiddelde van de corresponderende Paasche- en Laspeyres-indices, en hebben dus per definitie een waarde tussen de corresponderende Laspeyres- en Paasche-indices.

$$P_F \equiv [P_L \cdot P_P]^{1/2}$$

$$Q_F \equiv [Q_L \cdot Q_P]^{1/2}$$

Wanneer men een waarde-evolutie, met als waarde-index  $V = v^t/v^0$ , in een volume- en een prijscomponent wil ontbinden, zijn er bij gebruik van Laspeyres- en Paasche-indices twee mogelijkheden:

$$V = P_L \cdot Q_P = P_P \cdot Q_L$$